Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2021. Том 01. № 01 (01)
https://rio-nb-bstu.science

ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧАЩИХСЯ СРЕДНИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

УДК 519.111.1
ГРНТИ 27.17.33, 27.21.17, 27.39.17

Формула деления плоскостей на области прямыми, углами (ломаными), зигзагами

[1,2] Шайкова А. А., [3*] Мкртычев О. В.

Физико-математическая школа при образовательном центре «Юные шуховцы» НФ БГТУ им. В. Г. Шухова, 353919, Россия, г. Новороссийск, Мысхакское шоссе 75
МБОУ гимназия № 4, , 353912, Россия, г. Новороссийск, ул. Герцена 11А

[1] *Россия, 353912, Новороссийск, МБОУ гимназия №4 ул.Герцена 11А*
[2] *Физико-математическая школа образовательного центра «Юные шуховцы» при НФ БГТУ им. В. Г. Шухова, 353919, Россия, Новороссийск, Мысхакское шоссе 75*
[3] *НФ БГТУ им. В. Г. Шухова, 353919, Россия, Новороссийск, Мысхакское шоссе 75*

email: karto4ka2015@mail.ru, [*] mkrtychev-o-v@nb-bstu.ru

В данной статье автор рассматривает классическую задачу о делении плоскости на области произвольной формы путем ее «разрезания» различными линиями. С этой задачей автор статьи столкнулась при изучении главы 1.2 книги «Конкретная математика» Грэхема, Кнута и Паташника, если точнее, задачи о разрезании пиццы. Полученные в этой книге рекуррентные формулы покрывали не все рассмотренные варианты основной задачи. Поэтому автор статьи задалась целью — составить рекуррентную формулу для всех пропущенных случаев. В ходе исследования автору удалось заметить закономерность, связывающую все эти варианты задачи, и последующее рассмотрение выявленной закономерности привело к созданию соотношения, из которого можно вывести рекуррентные формулы для всех рассмотренных в книге подзадач, из чего можно предположить, что найденное соотношение может работать и в других случаях, и при различных исходных данных.

Ключевые слова: рекуррентная формула, плоскости, линии, области, геометрия.

Задача о разрезании пиццы

Среди проблем математики важное место занимают проблемы геометрии, топологии. Решение таких задач приводит исследователей к новым результатам, к новым методам и к новым свершениям. С такими проблемами автор статьи познакомилась на примере задачи о разрезании пиццы [1, стр. 35–45]. Эта задача вобрала в себя и геометрическое изящество, и мощь аппарата аналитических и рекуррентных соотношений. В данной статье не будет приводится это решение полностью, хотя оно и не лишено познавательного интереса. Автор статьи использует только некоторые из представленных авторами [1] формул и примеров, которые необходимы для раскрытия данной темы.

Условие задачи звучит таким образом: сколько кусков пиццы можно получить, делая n прямолинейных разрезов ножом? Или научным языком: каково максимальное число L_n областей, на которые n прямых делят плоскость? Впервые эта задача была решена в 1826 г. Якобом Штейнером (1796–1863) – швейцарским математиком, основателем синтетической

Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2021. Том 01. № 01 (01)
https://rio-nb-bstu.science

геометрии кривых линий и поверхностей второго и высших порядков [2]. Он уточнил и систематизировал идею проективного образования сложных геометрических образов из более простых, написал множество работ, включая «Систематическое развитие зависимости геометрических образов друг от друга», «Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга».

Рассматриваемая задача имеет три подзадачи, решение двух из которых в подробностях приводится в [1, глава 1.2]. Авторы книги в ходе разбора задачи математическим и аналитическим методами вывели несколько формул для решения каждой подзадачи.

В первой подзадаче рассматривается «деление пиццы», фактически плоскости, простыми прямыми линиями (рис. 1).

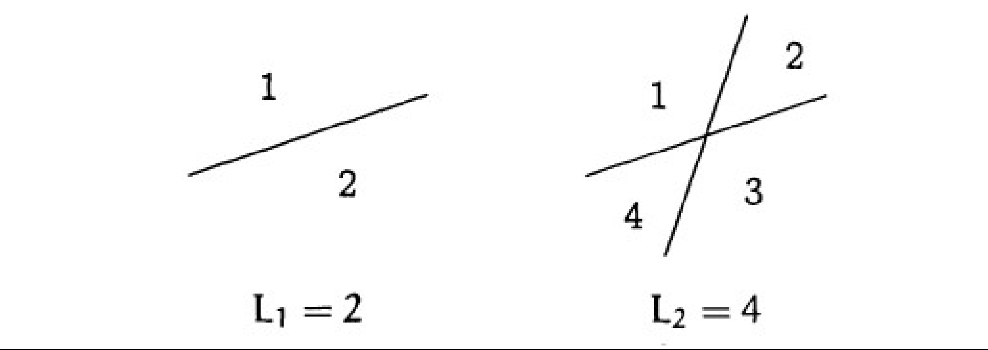

Рис. 1. Пример деления плоскости прямыми (рис. взят из [1])

Плоскость без прямых – это одна область, плоскость делится одной прямой на две области, двумя прямыми – на четыре области, четырьмя – на семь областей и т. д. (табл. 1).

Таблица 1

Зависимость количества областей от числа линий для прямых

n	0	1	2	3	4	5
L_n	1	2	4	7	11	16

Авторы [1] приводят и аналитическую формулу для L_n имеет вид:

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \qquad \text{при } n \geq 0,$$

и рекуррентную:

$$L_n = L_{n-1} + n. \qquad (1)$$

Как можно заметить из правого изображения рис. 1, для двух прямых

$$n = 2, L_2 = 4, p = 1,$$

где n – количество прямых, L_2 – количество разрезанных областей, p – количество пересечений прямых. Последний параметр нам понадобится для будущих вычислений.

Во второй подзадаче рассматривается уже разрезание плоскости углами (рис. 2).

Плоскость делится одним углом на две области, двумя углами – на семь областей и т. д. (табл. 2).

Таблица 2

Зависимость количества областей от числа линий для углов

n	0	1	2	3	4	5
A_n	1	2	7	16	29	46

Для этого случая авторы [1] также приводят аналитическую формулу:

$$A_n = 2n^2 - n + 1, \qquad (2)$$

но не приводят рекуррентной формулы, как для первой подзадачи.

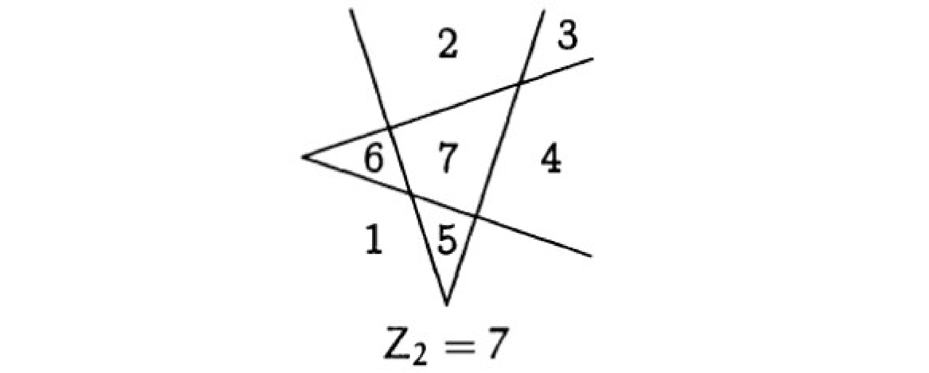

Рис. 2. Пример деления плоскости углами (рис. взят из [1])

Из рис. 2 можно заметить, что для двух углов

$$n = 2, A_2 = 7, p = 4.$$

Обозначения аналогичны приведённым выше.

Далее идёт третья подзадача, которая в книге [1] формулируется так: на какое максимально возможное число областей плоскость делится n зигзагами (рис. 3)?

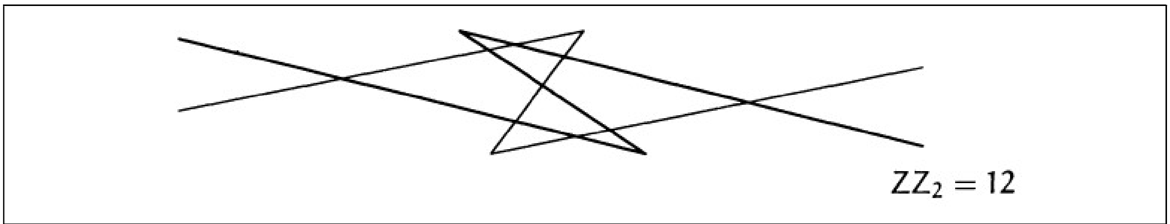

Рис. 3. Пример деления плоскости зигзагообразными линиями (рис. взят из [1])

Плоскость делится одним зигзагом – две области, двумя зигзагами – на 12 областей и т. д. (табл. 3).

Таблица 3

Зависимость количества областей от числа линий для зигзагов

n	0	1	2	3	4	5
ZZ_n	1	2	12	31	59	96

Приводится и аналитическая формула для этого случая [1, стр. 535]:

$$ZZ_n = \frac{9}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 1,$$

и рекуррентная:

$$ZZ_n = ZZ_{n-1} + 9n - 8. \quad (3)$$

Из рис. 3 можно заметить, что для двух зигзагов

$$n = 2, ZZ_2 = 12, p = 9.$$

Обозначения аналогичны приведённым выше.

Рассмотренная в таком виде задача о разрезании плоскости на области разным количеством линий различной формы и стала исходным пунктом дальнейших исследований автора данной статьи.

Формулы деления плоскостей на области прямыми, углами и зигзагами

В ходе изучения задачи о разрезании пиццы было замечено, что во второй подзадаче (т. е., случай с углом) не приведена рекуррентная формула. Автора данной статьи заинтересовал вопрос: можно ли получить рекуррентную формулу и для этого случая?

В ходе поиска ответа на этот вопрос, была замечена некоторая закономерность, из которой получилось вывести не только искомую формулу, но и соотношение, помогающее с единой точки зрения получить свою рекуррентность для каждой из трёх рассмотренных подзадач. Для работы с этим соотношением понадобятся рекуррентные формулы (1), (3). Для удобства приведём данные, используемые в дальнейших выкладках в табл. 4.

Таблица 4

Данные для прямых и зигзагов

Прямые				Зигзаги			
n	L_{n-1}	p	L_n	n	ZZ_{n-1}	p	ZZ_n
0	-	0	1	0	-	0	1
1	1	0	2	1	1	0	2
3	4	3	7	2	2	9	12

Приведённые в табл. 4 значения натолкнули автора статьи на формулу, которая имеет следующий вид:

$$X_n = X_{n-1} + n \cdot p_2 - d_X, \tag{4}$$

где n – число линий (прямых, углов, зигзагов), делящих плоскость; X_n – количество областей для n линий, на которые разрезана плоскость; p_2 – количество точек пересечений, образованных этими линиями, при $n = 2$, d_X – корректирующее слагаемое (свободный член) при $n = 2$, зависящее от вида линии.

Корректирующее слагаемое в формуле (4) можно вычислить из рекуррентных формул (1) или (3) для n=2. При этом все остальные величины берутся соответственно из табл. 4:

$$d_X = X_1 - X_2 + 2p_2. \tag{5}$$

Вычисления по формуле (5) дают для корректирующего слагаемого в случае прямых линий:

$$d_L = L_1 - L_2 + 2p_2 = 2 - 4 + 2 \cdot 1 = 0.$$

Таким образом, подставляя это значение в (4), получим для количества областей, на которые разрезается плоскость прямыми линиями, рекуррентную формулу:

$$L_n = L_{n-1} + n,$$

которая полностью совпадает с формулой (1).

Аналогичные вычисления для зигзагов дают:

$$d_{ZZ} = ZZ_1 - ZZ_2 + 2p_2 = 2 - 12 + 2 \cdot 9 = 8.$$

$$ZZ_n = ZZ_{n-1} + n \cdot p_2 - d = ZZ_{n-1} + 9n - 8.$$

Таким образом мы можем вывести недостающую рекуррентную формулу с помощью не рекуррентной формулы, представленной авторами [1], доказать её истинность для этого случая. Данные, использованные при решении, приведены в табл. 5.

Таблица 5

Данные для углов

Углы			
n	A_{n-1}	p	A_n
0	-	0	1
1	1	0	2
2	1	4	7

Для этого необходимо взять данные из табл. 5 и подставить их в формулы (4), (5):

$$d_A = A_1 - A_2 + 2p_2 = 2 - 7 + 2 \cdot 4 = 3.$$

$$A_n = A_{n-1} + n \cdot p_2 - d = A_{n-1} + 4n - 3. \tag{6}$$

Сравнение результатов вычислений с помощью формул (2) и (6) показывает справедливость полученного результата. Следовательно, формула (6) верна для рассмотренных случаев.

Таким образом, автор статьи показывает, что соотношение

$$X_n = X_{n-1} + n \cdot p_2 - d_x,$$

где $d_X = X_1 - X_2 + p_2 2$, справедливо для рассмотренных случаев.
У автора статьи возникло также гипотеза, что это соотношение может быть справедливым и для других видов линий, которыми разрезается плоскость, однако проверка этого предположения не входит в рамки данной статьи.

Конфликт интересов

Автор статьи заявляет, что у неё нет конфликта интересов по материалам данной статьи с третьими лицами, на момент подачи статьи в редакцию журнала, и ей ничего не известно о возможных конфликтах интересов в настоящем со стороны третьих лиц.

Список литературы

1. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика. Основание информатики / пер. с англ. В. В. Походзея и А. В. Ходулёва под редакцией А. В. Ходулёва / М.: Мир, 1998. 703 с.
2. Якоб Штейнер // Википедия [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D1%82%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B5%D1%80,_%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B1
(10.02.2021).

Formula for division of planes into area by straights, corners (broken), zigzags

[1,2] Shaikova A. A., [3*] Mkrtychev O. V

[1] *MBOU gymnasium №4,353912, Russia, Novorossiysk, st. Herzen 11A*
[2] *Physics and mathematics school at the educational center «Young Shukhovtsy» of Novorossiysk Branch of Belgorod V G Shukhov State Technology University, 353919, Russia, Novorossiysk, Myskhakskoe shosse 75*
[3] *Novorossiysk Branch of Belgorod V G Shukhov State Technology University, 353919, Russia, Novorossiysk, Myskhakskoe shosse 75*

email: karto4ka2015@mail.ru, [*] mkrtychev-o-v@nb-bstu.ru

In this article, the author examines the classical problem of dividing a plane into regions of arbitrary shape by «cutting» it with various lines. The author of the article faced this problem while studying chapter 1.2 of the book «Concrete Mathematics» by Graham, Knut and Patashnik, more precisely, the problem of cutting pizza. The recurrence formulas obtained in this book did not cover all the considered variants of the main problem. Therefore, the author of the article set himself the goal - to compose a recurrent formula for all the missed cases. In the course of the study, the author was able to notice a pattern connecting all these variants of the problem, and the subsequent consideration of the revealed pattern led to the creation of a relation from which recurrent formulas can be derived for all the subproblems considered in the book, from which it can be assumed that the found relation can work in other cases and with different initial data

Keyword: recurrent formula, planes, lines, areas, geometry.