*Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2021. Том 01. № 01 (01)*
https://rio-nb-bstu.science

ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧАЩИХСЯ СРЕДНИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

УДК 372.851, 514
ГРНТИ 14, 09, 95, 27
ВАК 01, 01, 04

# Коксетер: «Новые встречи с геометрией»

[1,2] Нежельский Г. М., [3*] Мкртычев О. В.

[1] *Россия, 353900, Новороссийск, МАОУ СОШ №22 ул.Суворовская 5*
[2] *Физико-математическая школа образовательного центра «Юные шуховцы» при НФ БГТУ им. В. Г. Шухова, 353919, Россия, Новороссийск, Мысхакское шоссе 75*
[3] *НФ БГТУ им. В. Г. Шухова, 353919, Россия, Новороссийск, Мысхакское шоссе 75*

email: georg_n03@mail.ru, [*] mkrtychev-o-v@nb-bstu.ru

Эта статья посвящена известному британскому и канадскому учёному, математику Гарольду Скотту Макдональду Коксетеру. Особенное место в его научной деятельности занимала геометрия. Коксетер был приверженцем классической школы геометрии. Широкую известность в научных кругах он приобрёл после опубликования списка правильных многоугольников в соавторстве с Лонге-Хиггинсом и Миллером. Всеобщая же известность пришла к Коксетеру после выхода в свет книги «Geometry Revisited», написанной в соавторстве с Самуэлем Грейтером В России она известна как «Новые встречи с геометрией». Эта книга обрела популярность среди любителей математики всего мира. В статье вы найдете факты из биографии Коксетера, его труды и подробный разбор некоторых геометрических теорем и задач, которые Гарольд Коксетер описал в своей книге.

*Ключевые слова*: математика, геометрия, Коксетер, новые встречи с геометрией

## Биография

В молодости Гарольд Скотт Коксетер (фото на рис. 1) сочинял музыку и был пианистом уже в возрасте 10 лет. Он писал, что математика и музыка тесно связаны в изложении своих идей, в статье 1962 года «Математика и музыка» в Canadian Music Journal [1]. Коксетер работал в течение 60 лет в Университете Торонто и опубликовал двенадцать книг. Наиболее известен по своим работам о правильных многоугольниках и многомерной геометрии. Он был сторонником классического подхода к геометрии в период, когда тенденция подхода к геометрии всё больше и больше напоминала подход к алгебре.
Коксетер пришёл в Тринити-колледж, Кембридж, в 1926 году в качестве преподавателя математики. Там он получил степень бакалавра в 1928 году и докторскую степень в 1931 году. В 1932 году он отправился в Принстонский университет в течение года на стипендию Фонда Рокфеллера, где он работал с Германом Вейлем, Освальдом Вебленом и Соломоном Лефшецом. Вернувшись в Тринити через год, он принял участие в семинаре по философии математики, организованном Людвигом Витгенштейном. В 1934 году он провел один год в Принстонском университете в качестве стипендиата фонда Проктера. В 1936 году Коксетер переехал в Канаду и стал работать в Университете Торонто, став его профессором в 1948 году. Он был избран членом Королевского общества Канады в 1948 году и членом Королевского общества в 1950 году. Он работал вместе с Маурицем Эшером и

*Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2021. Том 01. № 01 (01)*
https://rio-nb-bstu.science

Бакминстером Фуллером, часть его работ по геометрическим фигурам вдохновлена рядом их идей. Коксетер, Лонге-Хиггинс и Миллер были первыми, кто опубликовал полный список правильных многогранников (1954). В 1978 году Канадское математическое общество учредило премию Коксетера—Джеймса в его честь. В 1990 году он стал иностранным членом Американской академии искусств и наук. В 1997 году он получил медаль Сильвестра от Королевского общества и был награждён Орденом Канады.


Рис. 1. Гарольд Скотт Макдональд Коксетер (Кокстер) (англ. Harold Scott MacDonald Coxeter; 9 февраля 1907 — 31 марта 2003) — канадский математик британского происхождения. Считается одним из крупнейших геометров XX века. Он родился в Лондоне, но провёл большую часть своей жизни в Канаде.

**Труды Коксетера**

1940: Regular and Semi-Regular Polytopes I, Mathematische Zeitschrift 46:380-407, MR 2,10 doi:10.1007/BF01181449
1942: Non-Euclidean Geometry (1st edition), (2nd ed, 1947),(3rd ed,1957), (4th ed, 1961), (5th ed, 1965), University of Toronto Press (6th ed, 1998), MAA.
1949: The Real Projective Plane (Кокстер Г. С. М. Действительная проективная плоскость. – М:Физматгиз, 1959).
1954: (with Michael S. Longuet-Higgins and J. C. P. Miller) "Uniform Polyhedra", Philosophical Transactions of the Royal Society A 246: 401–50 doi:10.1098/rsta.1954.0003.
1957: (with W.O.J. Moser) Generators and Relations for Discrete Groups 1980: Second edition, Springer–Verlag.
1961: Introduction to Geometry (Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966).
1963: Regular Polytopes (2nd edition), Macmillan Company.
1970: Twisted honeycombs (American Mathematical Society, 1970, Regional conference series in mathematics Number 4,).
1973: Regular Polytopes, (3rd edition), Dover edition.
1974: Projective Geometry (2nd edition).

Также Коксетер, в соавторстве с Грейтцером, в 1967 году выпустили книгу под названием «Geometry Revisited» (в русском переводе «Новые встречи с геометрией») [2]. Именно ей посвящена данная работа. Перевод на русский язык книги «Новые встречи с геометрией» выполнили Савины и этот перевод увидел свет в замечательной серии «Библиотека математического кружка», издаваемой в середине и второй половине XX века в СССР. Первая книжка в этой серии была опубликована в 1957 году: книга Аргунова Б. И. и

*Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2021. Том 01. № 01 (01)*
https://rio-nb-bstu.science
Скорнякова Л. А. «Конфигурационные теоремы» в издательстве Гостехиздат, Москва. Книга «Новые встречи с геометрией» состоит из 6 глав, в каждой главе по 7...9 параграфов. Также она содержит ответы и указания к решению, содержащихся в ней упражнений. Библиография русского перевода содержит 46 наименований книг, большинство из которых написаны или переведены на русский язык. В конце книги приведены указатель и словарь основных терминов, используемых в книге. Ход изложения постоянно сопровождается чертежами, издание содержит 135 рисунков. Глава первая «Точки и линии, связанные с треугольником» содержит обобщённую теорему синусов, теорему Чеви, сведения о замечательных точках треугольника и об ортотреугольнике, а также теорему Штейнера–Лемуса, параграф о серединном треугольнике и прямой Эйлера, сведения об окружности девяти точек и педальном треугольнике. Во второй главе «Некоторые свойства окружностей» вводятся понятия степени точки относительно окружности, радикальной оси двух окружностей и соосных окружностях. В этой же главе рассказывается о прямых Симпсона, теореме Птолемея, теореме бабочки и теореме Морлея. Третья глава повествует о коллинеарности и конкурентности. Она содержит параграф о четырёхугольниках с теоремой Вариньона, параграф о вписанных четырёхугольниках с теоремой Брахмагупты, параграф о шестиугольниках. В этой же главе авторы рассказывают о треугольниках Наполеона о перспективных треугольниках, о теоремах Менелая, Паппа, Дезарга, Паскаля и Брианшона. В четвёртой главе рассказывается о преобразованиях: параллельный перенос, поворот, разворот, симметрия, спиральное подобие. Здесь же приведены задача Фаньяно и задача о трёх кувшинах. В пятой и шестой главах авторы знакомят читателей с инверсивной и проективной геометриями. Здесь вводятся понятия сложного отношения и инверсии, гиперболические функции, полярное преобразование, проективной плоскости, конических сечений, стереографической и гномонической проекций. В главе 5 приводится теорема Фейербаха. В данной статье автор решил привести доказательства теоремы о бабочке и теоремы Фейербаха, а также решение задачи Фаньяно, используя в качестве основы книгу Коксетера и Грейтцера [2], а также другие источники [3–5].

**Теорема о бабочке**

Опубликована в 1815 году и её авторство приписывают Уильяму Джорджу Горнеру.
Данная теорема сформулирована так: Пусть через точку $M$, являющуюся серединой хорды $PQ$ некоторой окружности, проведены две произвольные хорды $AB$ и $CD$ той же окружности (рис. 2). Пусть хорды $AD$ и $BC$ пересекают хорду $PQ$ в точках $X$ и $Y$. Тогда $M$ является серединой отрезка $XY$.

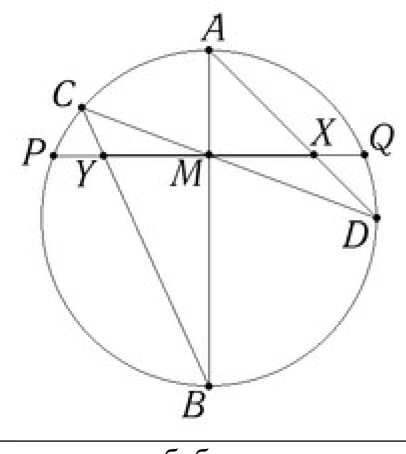

Рис. 2. Чертёж к теореме о бабочке

Верна и обратная теорема о бабочке: Пусть через точку $M$ внутри некоторой окружности проведены две произвольные хорды $AB$ и $CD$. Пусть хорды $AD$ и $BC$ пересекают

произвольную хорду $PQ$ в точках $X$ и $Y$. Тогда если $M$ является серединой отрезка $XY$, то она одновременно является серединой хорды $PQ$.
Теорема о бабочке имеет большое число различных доказательств, как в рамках элементарной геометрии, так и использующих методы, выходящие за её пределы.

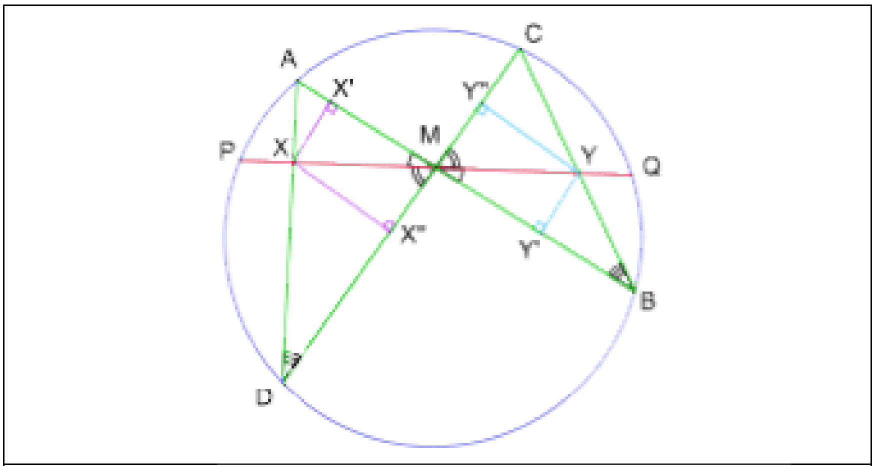


Рис. 3. Чертёж к доказательству теоремы о бабочке

В частности, в проективной модели плоскости Лобачевского, треугольник $\Delta AMD$ центрально симметричен $\Delta BMC$ и отсюда легко следует теорема.
При помощи проецирования двойных отношений: Рассмотрим двойное отношение точек ($P$, $M$, $X$, $Q$), и спроецируем его на окружность из точки $A$ (рис. 3). Точки $P$ и $Q$ перейдут сами в себя, так как принадлежат окружности, а точки $M$ и $X$ перейдут в точки $B$ и $D$ соответственно. Получаем $(P, M, X, Q) = (P, B, D, Q)$(последнее следует трактовать как двойное отношение точек на комплексной плоскости). Проецируем обратно на прямую $PQ$ с центром в точке $C$ , получаем $(P, M, X, Q) = (P, Y, M, Q)$. Если расписать двойное отношение по определению, то получим необходимое равенство. Используется также метод инверсии.
Для данной теоремы Шарыгин предложил обобщение (рис. 4): Пусть на окружности дана хорда $AB$, на ней — точки $M$ и $N$, причём $AM = BN$. Через точки $M$ и $N$ проведены хорды $PQ$ и $RS$, соответственно. Прямые $QS$ и $RP$ пересекают хорду $AB$ в точках $K$ и $L$, тогда $AK = BL$.

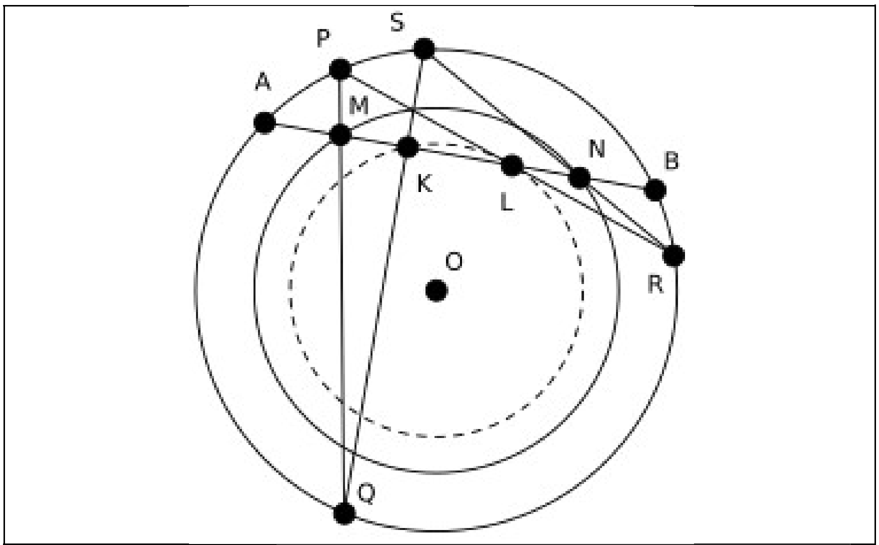


Рис. 4. Обобщение Шарыгина

**Задача Фаньяно**

*Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2021. Том 01. № 01 (01)*
https://rio-nb-bstu.science

В начале XVIII века итальянский инженер и математик Фаньяно деи Тоски (1682 – 1766) поставил следующую задачу: вписать в данный остроугольный треугольник $ABC$ треугольник наименьшего периметра так, чтобы на каждой стороне треугольника $ABC$ лежала одна вершина треугольника.

Воспользуемся следующим приёмом: с помощью движений плоскости попробуем выстроить стороны вписанного треугольника в ломаную линию. Тогда периметр будет не меньше отрезка, соединяющего концы этой ломаной. А наименьший периметр будет соответствовать случаю, когда стороны ломаной лежат на одной прямой.

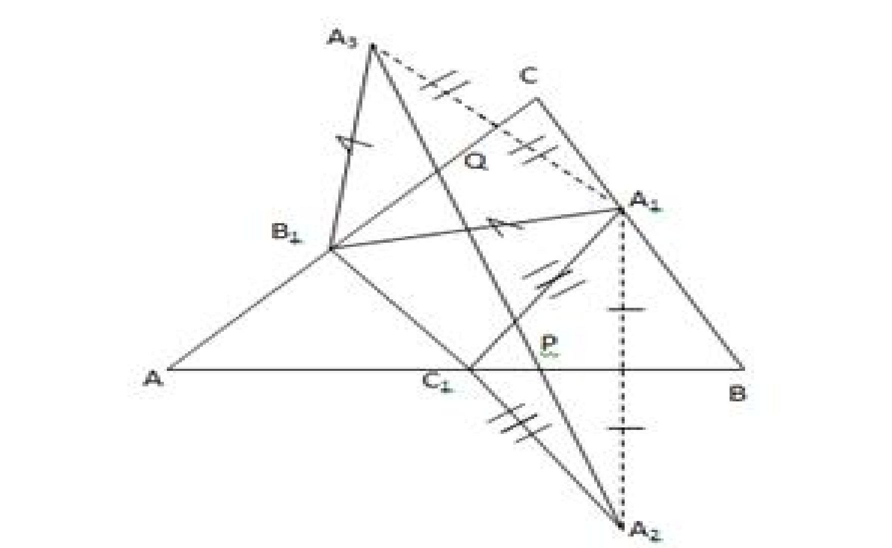


Рис. 5. Чертёж решения задачи Фаньяно

Итак, пусть точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на сторонах треугольника $ABC$ ($A_1$ – на стороне $BC$ и т. д.) (рис. 5). Отразим точку $A_1$ симметрично относительно сторон $AB$ и $AC$, получив точки $A_2$ и $A_3$ соответственно рис. 6. Длина трёхзвенной ломаной $A_1B_1C_1A_2$ равна периметру треугольника $A_2B_2C_2$. Для того, чтобы периметр был наименьшим (равным отрезку $A_2A_3$), нужно, чтобы вершины $B_1$ и $C_1$ лежали в точках пересечения отрезка $A_2A_3$ со сторонами треугольника $AB$ и $AC$. Осталось понять, как выбрать точку $A_1$ на стороне BC таким образом, чтобы длина отрезка $A_2A_3$ была наименьшей. Для этого заметим, что треугольник $A_2AA_3$ – равнобедренный ($A_3A= A_2A= A_1A$), а угол при его вершине $A$ равен и потому не зависит от выбора точки $A_1$. Итак, при движении точки $A_1$ по стороне $BC$ углы треугольника $A_2AA_3$ не меняются. А его линейные размеры будут наименьшими, когда наименьшей будет сторона $A_2A$, которая равна $A_1A$. Значит, $A_1A$ – высота, опущенная на сторону $BC$.

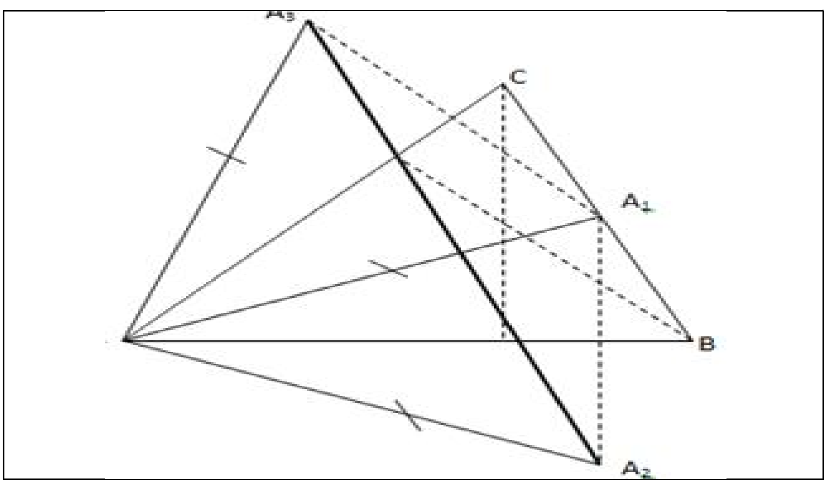


Рис. 6. Дополнительный чертёж для задачи Фаньяно

*Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2021. Том 01. № 01 (01)*
https://rio-nb-bstu.science

Мы видим, что существует единственный вписанный треугольник наименьшего периметра, его вершина $A_1$ – основание высоты. Если провести те же рассуждения с вершинами $B_1$ и $C_1$, получим, что они также являются основаниями высот (поскольку треугольник минимального периметра – единственный). Среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет ортотреугольник (т. е. треугольник с вершинами в основаниях высот).

**Теорема Фейербаха**

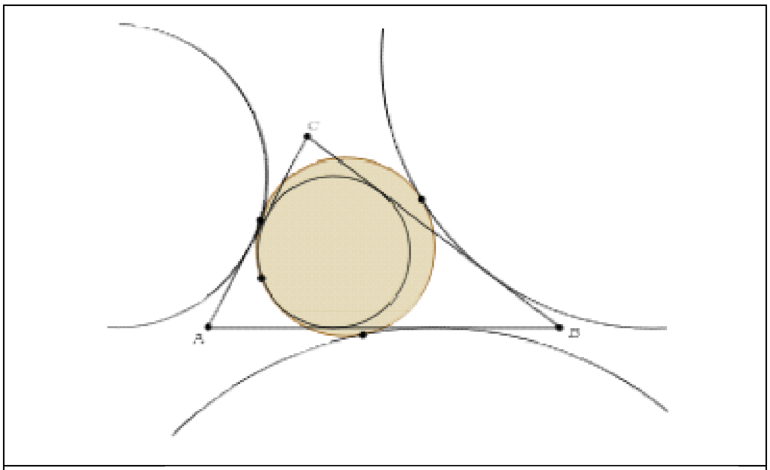

Рис. 6. Чертёж теоремы Фейербаха

Теорема Фейербаха — один из красивейших результатов геометрии треугольника. Теорема была сформулирована и доказана Карлом Вильгельмом Фейербахом в 1822 году. Данная теорема сформулирована так: Окружность девяти точек произвольного треугольника касается вписанной и всех трёх вневписанных окружностей этого треугольника.

Замечания:

1) точки попарного касания вписанной и трех вневписанных окружностей с окружностью девяти точек называются точками Фейербаха;

2) каждая точка Фейербаха лежит в точке касания пары соответствующих окружностей на линии, соединяющей их центры, на расстоянии соответствующих радиусов до их центров;

3) в равностороннем треугольнике окружность девяти точек не касается, а совпадает со вписанной окружностью;

4) три точки касания трёх вневписанных окружностей треугольника с его с окружностью девяти точек образуют так называемый треугольник Фейербаха для данного треугольника;

5) точка Фейербаха $F$ в Энциклопедии центров треугольника Кларка Кимберлинга идентифицируется, как точка (центр) $X$ [6].

Найдено более 300 доказательств этой теоремы, многие из которых используют инверсию. Одно из них, довольно громоздкое, принадлежит самому Фейербаху. Самое короткое известное доказательство использует обратную теорему Кейси (теорема Кейси или Кэзи — теорема в евклидовой геометрии, обобщающая неравенство Птолемея, названа по имени ирландского математика Джона Кейси).

Гипербола Фейербаха — описанная гипербола, проходящая через ортоцентр и центр вписанной окружности. Её центр лежит в точке Фейербаха. Подерные и чевианные окружности точек на гиперболе Фейербаха проходят через точку Фейербаха. В частности, через точку Фейербаха проходит окружность, проведённая через основания биссектрис.

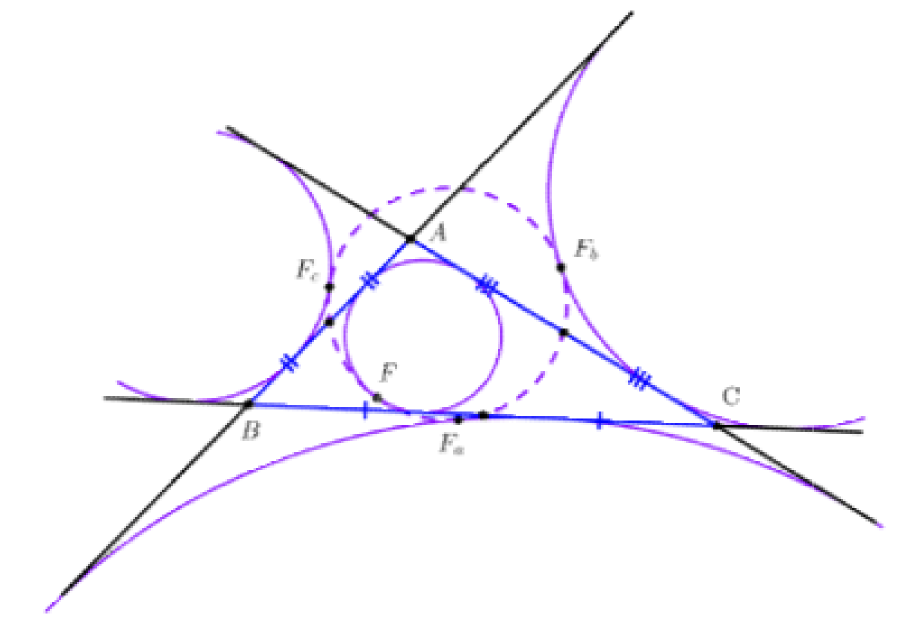

Рис. 7. $F$, $F_a$, $F_b$, $F_c$ – точки Фейербаха

Точка Фейербаха $F$ лежит на линии, соединяющей центры двух окружностей: окружности Эйлера и вписанной окружности, что и определяет её.
Пусть , и расстояния от точки Фейербаха $F$, до вершин серединного треугольника (треугольника с вершинами в серединах сторон данного треугольника) (рис. 7). Тогда

.

Это утверждение эквивалентно тому, что наибольшее из трёх расстояний равно сумме двух других. То есть аналог свойств теоремы Мавло не для дуг, а для отрезков.
Аналогичное соотношение также встречается в разделе: «Теорема Помпею». Несколько новых теорем о точке Фейербаха $F$ можно найти у Ф. Ивлева.

**Список литературы**

1. Интернет-ресурс: Википедия // [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org (28.08.2020).
2. Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер. Новые встречи с геометрией / Пер. с англ. А. П. Савина и Л. А. Савиной. Под ред. А. П. Савина / Серия «Библиотека математического кружка». Выпуск 14. М.: Наука, 1978. 224 с.
3. Интернет-ресурс: Электронная научная библиотека // [Электронный ресурс]. URL: https://scask.ru (10.09.2020).
4. Интернет-ресурс: Наш сайт посвящён Математике // [Электронный ресурс]. URL: https://math.ru (05.10.2020).
5. Интернет-ресурс: ИНТЕРНЕТ-БИБЛИОТЕКА Виталия Арнольда // [Электронный ресурс]. URL: http://ilib.mccme.ru (11.12.2020).
6. Кларк Кимберлинг «The Encyclopedia of Triangle Centers» // [Электронный ресурс]. URL: https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html (10.11.2020).

## Coxeter: «New Encounters with Geometry»

[1,2] Nezhelsky G. M., [3*] Mkrtychev O. V

*Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2021. Том 01. № 01 (01)*
https://rio-nb-bstu.science

*[1] MAOU SOSH No. 22, 353900, Russia, Novorossiysk, st. Syvorovskaya 5*
*[2] Physics and mathematics school at the educational center «Young Shukhovtsy» of Novorossiysk Branch of Belgorod V G Shukhov State Technology University, 353919, Russia, Novorossiysk, Myskhakskoe shosse 75*
*[3] Novorossiysk Branch of Belgorod V G Shukhov State Technology University, 353919, Russia, Novorossiysk, Myskhakskoe shosse 75*

email: georg_n03@mail.ru, * mkrtychev-o-v@nb-bstu.ru

This article is dedicated to the famous British and Canadian scientist, mathematician Harold Scott MacDonald Coxeter. Geometry occupied a special place in his scientific activity. Coxeter was an adherent of the classical school of geometry. He gained wide popularity in scientific circles after publishing a list of regular polygons in collaboration with Longuet-Higgins and Miller. General fame came to Coxeter after the publication of the book "Geometry Revisited", co-authored with Samuel Greater. In Russia, it is known as "New Encounters with Geometry." This book has gained popularity among mathematics lovers around the world. In the article you will find facts from the biography of Coxeter, his works and a detailed analysis of geometric theorems and problems that Harold Coxeter described in his book.

*Keywords*: mathematics, geometry, Coxeter, new encounters with geometry