МАТЕМАТИКА

doi: 10.51639/2713-0576_2022_2_2_71
УДК 511.1
ГРНТИ 27.15
ВАК 01.01.06

Рекуррентные последовательности и числа Фибоначчи

Зорина И. С.

Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова
655017, г. Абакан, пр-т Ленина 90

e-mail: irazorina2408@gmail.com

Одним из основных понятий математики является понятие последовательности элементов заданного множества A. Последовательность можно считать заданной на A, если указан закон, по которому каждому натуральному числу сопоставляется элемент u_n множества A. Последовательности встречаются в различных разделах математики, с их помощью описываются многие свойства изучаемых объектов. Одной из наиболее трудных и интересных проблем теории чисел является изучение последовательности простых чисел, поведение этой последовательности при возрастании номеров её членов. Существуют различные способы задания последовательностей: с помощью формулы общего члена последовательности, с помощью указания связи между членами последовательности (рекуррентный способ), с помощью перечисления членов последовательности, с помощью производящей функции и другие способы. Последовательность Фибоначчи – одна из тех, что задаются только рекуррентным способом.

Ключевые слова: рекуррентные последовательности, числа Фибоначчи, теория чисел.

Последовательностью элементов заданного множества A называют закон, по которому каждому натуральному числу n сопоставляется элемент a_n множества A. Например, на множестве $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел последовательность квадратов натуральных чисел задается простым правилом, каждому n сопоставляется n^2. Под натуральными числами мы будем понимать числа 0, 1, 2, 3, ….

Другой способ задания последовательности – с помощью указания связи между некоторыми членами последовательности. Так можно задать, например, арифметическую и геометрическую прогрессию: разность для арифметической прогрессии (отношение – для геометрической) между любыми двумя соседними членами последовательности a_{n+1} и a_n есть величина постоянная, равная d – разности арифметической прогрессии (q – знаменателю геометрической прогрессии). В таком способе задания могут участвовать и более двух членов последовательности, таким образом, один из членов последовательности можно считать определенным с помощью других членов этой последовательности – это, так называемый, рекуррентный способ задания. В случае арифметической прогрессии имеем следующее соотношение для ее членов: $a_{n+1} - a_n = d$,(в случае геометрической прогрессии $a_{n+1} - qa_n = 0$).

Для членов последовательности $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, где $a_n = n^2$ можно составить следующее соотношение: $a_{n+1} = (n + 1)^2$. Отсюда следует, что $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$ для любого натурального числа n. Увеличив в последнем равенстве n на 1, получим $a_{n+2} - a_{n+1} = 2n + 3$. Тогда из двух последних равенств следует $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$. Повторив эти рассуждения, мы придём ещё к одному соотношению $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0$, у которого правая часть

Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2022. Том 02. № 02 (06)
https://rio-nb-bstu.science

равна нулю. Таким образом, последовательность квадратов натуральных чисел удовлетворяет следующим соотношениям:

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 1,$$
$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2,$$
$$a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0.$$

Таких соотношений, которым удовлетворяют члены рассматриваемой последовательности, бесконечное множество. Приведённые соотношения для $(a_n) = (n^2)$ примечательны тем, что в первом из них указана связь между a_n и a_{n+1}, причём, справа имеем функцию $f(n) = 2n + 1$, во втором – соотношение между an, a_{n+1} и a_{n+2}, с правой частью $\varphi(n) = 2 = \text{const}$, а в третьем соотношении правая часть равна нулю, и это соотношение – первое, с нулевой правой частью. Полученные соотношения называются рекуррентными [2].

Для решения рекуррентных уравнений используют два метода: метод производящих функций и метод характеристических функций.

Метод производящих функций

1 Записать рекуррентное соотношение и начальные данные для него в следующем виде (если порядок соотношения равен k)

$$a_0 = \cdots,$$
$$a_1 = \cdots,$$
$$a_{k-1} = \cdots,$$
$$\ldots$$
$$a_n = \cdots, n \geqslant k$$

2. Домножить каждую строчку на z в соответствующей степени $z^k \cdot a_k$ и сложить все выражения для $n \geq 0$. В левой части получится сумма $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — это производящая функция, назовем её G(z). Правую часть преобразовать так, чтобы она превратилась в выражение, включающее G(z).

3 Решить полученное уравнение относительно $G(z)$.

4. Разложить $G(z)$ в степенной ряд, тогда коэффициент при z_n будет искомым выражением для a_n [7].

Метод характеристических функций

Этот метод практически аналогичен методу решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, кратко алгоритм выглядит так:

1. Записать соответствующее однородное рекуррентное уравнение (РУ):

$$p_{n+k}a_{n+k} + p_{n+k-1}a_{n+k-1} + \ldots + p_n a_n = f \rightarrow$$
$$\rightarrow p_{n+k}a_{n+k} + p_{n+k-1}a_{n+k-1} + \ldots + p_n a_n = 0.$$

2. Выписать для него характеристическое уравнение и найти его корни λ_i

$$p_{n+k}\lambda^k + p_{n+k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

3. Выписать согласно полученным корням λ_1, ..., λ_k общее решение однородного рекуррентного соотношения

$C_1\lambda_1^n + \ldots + C_k\lambda_k^n$ для случая различных простых корней,

$C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + \ldots + C_m n^m \lambda_1^n + \ldots + C_k\lambda_k^n$ для случая корня λ_1 кратности m.

4. Подобрать частное решение неоднородного рекуррентного соотношения по виду правой части (особенно удобно для правых частей вида $\mu^n \cdot P(n)$, $P(n)$ - многочлен от n).

5. Представить общее решение неоднородного РУ как сумму общего решения соответствующего однородного РУ и частного решения неоднородного РУ.

6. Подставить начальные условия a_0, a_1, ..., a_{k-1} и получить значения констант C_1, ..., C_k. [7]

Перейдём к числовым последовательностям, которые задаются рекуррентно. Числа Фибоначчи — это ряд, состоящий из целых чисел. Их особенность заключается в том, что каждый элемент представляет собой сумму двух предыдущих чисел [3]. Последовательность Фибоначчи начинается с 0 и 1. Продолжить ряд легко: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2022. Том 02. № 02 (06)
https://rio-nb-bstu.science

и так до бесконечности. Общая формула данной рекуррентной последовательности имеет вид

$$f_0 = 0,$$
$$f_1 = 1,$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2. [5]$$

Методы решения ЛРУ можно применить к числам Фибоначчи. Рассмотрим способ производящей функции.

Способ 1. Производящая функция

Начинаем с второго шага алгоритма, домножаем на z^n:

$$1 \cdot f_0 = 0 \cdot 1,$$
$$z \cdot f_1 = 1 \cdot z,$$
$$z \cdot f_n = (f_{n-1} + f_{n-2}) \cdot z_n \,, n \geq 2.$$

Складываем все строчки:

$$f_1 + f_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^n.$$

На третьем шаге алгоритма приводим все суммы к замкнутому виду:

$$G(z) = z + z\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^{n-2},$$
$$G(z) = z + z\sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$
$$G(z) = z + z(G(z) - f_0) + z^2 G(z),$$
$$G(z) = z + zG(z) + z^2 G(z)$$

откуда выводим искомое выражение для производящей функции:

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Теперь разложим её в степенной ряд. Для этого сначала разложим знаменатель на множители. Найдём корни уравнения:

$$1 - z - z^2,$$
$$z_{1,2} = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Таким образом,

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{-z}{(z_1 - z)(z_2 - z)} = \frac{z_1/(z_1 - z_2)}{z_1 - z} + \frac{z_2/(z_2 - z_1)}{z_2 - z}$$

Чтобы разложить данные дроби в ряды, используем известное разложение для дроби:

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

Рассмотрим первую дробь и поделим в ней числитель и знаменатель на z_1:

$$\frac{z_1/(z_1 - z_2)}{z_1 - z} = \frac{1}{z_1 - z_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} = \frac{1}{z_1 - z_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_1^n}$$

Аналогично (но с делением на z_2) действуем со второй дробью:

$$\frac{z_2/(z_2 - z_1)}{z_2 - z} = \frac{1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{z_2}} = \frac{1}{z_2 - z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_2^n}$$

Таким образом,

Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2022. Том 02. № 02 (06)
https://rio-nb-bstu.science

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z_1-z_2}\cdot\frac{1}{z_1^n}+\frac{1}{z_2-z_1}\cdot\frac{1}{z_2^n})z^n$$

и, следовательно,

$$f_n=\frac{1}{z_1-z_2}\cdot\frac{1}{z_1^n}+\frac{1}{z_2-z_1}\cdot\frac{1}{z_2^n}$$

Преобразуем данное выражение, используя то, что

$$\frac{1}{z_1}=-z_2,\ \ \frac{1}{z_2}=-z_1,\ \ z_1-z_2=\sqrt{5}$$

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

И окончательно,

$$f_n=\frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right)$$

Помимо чисел Фибоначчи существуют другие примеры линейных рекуррентных уравнений, такие как: число Лукаса, Падовская последовательность и число Пелля.

Числа Лукаса или серия Lucas является целочисленная последовательность имени математика Франсуа Эдуар Анатоль Лукаса (1842–1891), который изучал как эту последовательность и тесно связанные с ними числа Фибоначчи . Числа Люка и числа Фибоначчи образуют дополнительные экземпляры последовательностей Лукаса.

Последовательность Лукаса имеет те же рекурсивные отношения, что и последовательность Фибоначчи, где каждый член представляет собой сумму двух предыдущих членов, но с разными начальными значениями. В результате получается последовательность, в которой отношения следующих друг за другом членов приближаются к золотому сечению, и фактически сами члены представляют собой округление целых степеней золотого сечения. Последовательность также имеет множество отношений с числами Фибоначчи, например, тот факт, что добавление любых двух чисел Фибоначчи, разделенных двумя членами в последовательности Фибоначчи, приводит к промежуточному числу Люка. Первые несколько чисел Лукаса 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... [10].

Числа Лукаса можно определить:

$$L_n=\begin{cases} 2, \text{если } n=0, \\ 1, \text{если } n=1\,, \\ L_{n-1}+L_{n-2,}, \text{если } n>1, \end{cases}$$

где *n* принадлежит натуральным числам.

Числа Лукаса можно расширить до отрицательных чисел, чтобы получить вдвойне бесконечную последовательность:

$$L_{n-2}=L_n-L_{n-1},$$

..., –11, 7, –4, 3, –1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, … если $-5 \le n \le 5$.

Формула для членов с отрицательными индексами в этой последовательности:

$$L_{-n}=(-1)^n L_n$$

Последовательность Падована — это целочисленная последовательность P(n) с начальными значениями

$$P(0)=P(1)=P(2)=1$$

и линейным рекуррентным соотношением

$$P(n)=P(n-2)+P(n-3).$$

Первые значения $P(n)$ таковы: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, …

Последовательность Падована названа в честь Ричарда Падована, который в своём эссе Dom. Hans van der Laan : Modern Primitive 1994 года приписал её открытие нидерландскому

Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2022. Том 02. № 02 (06)
https://rio-nb-bstu.science

архитектору Гансу ван дер Лаану. Последовательность стала широко известной после того, как её описал Ян Стюарт в колонке Mathematical Recreations в журнале Scientific American в июне 1996 года [6].

Число Пелля — целое число, входящее в качестве знаменателя в бесконечную последовательность подходящих дробей для квадратного корня из 2. Эта последовательность приближений начинается следующим образом: $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}$, ...то есть первые числа Пелля — 1, 2, 5, 12 и 29. Числители той же последовательности приближений являются половинами сопутствующих чисел Пелля— бесконечной последовательностью, начинающейся с 2, 6, 14, 34 и 82. Обе последовательности, числа Пелля и сопутствующие числа Пелля, могут быть вычислены с помощью рекуррентного соотношения, похожего на формулы для чисел Фибоначчи, и обе последовательности чисел растут экспоненциально, пропорционально степени серебряного сечения $1+\sqrt{2}$. Кроме использования в цепной дроби приближений к квадратному корню из двух, числа Пелля могут быть использованы для поиска квадратных треугольных чисел и для решения некоторых комбинаторных задач перечисления. Последовательность чисел Пелля известна с древних времен. Как и уравнение Пелля, числа Пелля ошибочно приписаны Леонардом Эйлером Джону Пеллю. Числа Пелля задаются линейным рекуррентным соотношением:

$$P_n = \begin{cases} 0, n = 0, \\ 1, n = 1, \\ 2P_{n-1} + P_{n-2}, n > 1, \end{cases}$$

Числа Пелля можно выразить формулой

$$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

Для больших значений *n* член $(1+\sqrt{2})^n$ доминирует в этом выражении, так что числа Пелля примерно пропорциональны степеням серебряного сечения $(1+\sqrt{2})$, аналогично тому, как числа Фибоначчи примерно пропорциональны степеням золотого сечения.

Возможно и третье определение — в виде матричной формулы

$$\begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

Многие тождества могут быть доказаны из этих определений, например тождество, аналогичное тождеству Кассини для чисел Фибоначчи,

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n,$$

как немедленное следствие матричной формулы (подставляя определители матриц слева и справа) [9].

Подведём итоги. Линейной рекуррентной последовательностью (линейной рекуррентой) называется всякая числовая последовательность, задаваемая линейным рекуррентным соотношением: для всех. с заданными начальными членами, где d — фиксированное натуральное число, — заданные числовые коэффициенты. При этом число d называется порядком последовательности. Линейные рекуррентные последовательности иногда называют также возвратными последовательностями.

Решать рекуррентные последовательности можно несколькими способами, например, с помощью производящей функции или характеристического уравнения.

В математике существуют числовые последовательности, которые задаются с помощью рекуррент. Это такие последовательности как:

–Числа Фибоначчи.

–Числа Лукаса.

–Падовская последовательность.

–Числа Пелля.

Молодёжный вестник НФ БГТУ. 2022. Том 02. № 02 (06)
https://rio-nb-bstu.science

Кроме того, данные числовые последовательности можно решать теми же методами, с помощью которых решают рекуррентные последовательности, примеры решения чисел Фибоначчи этими способами представлены в данной работе.
Рекуррентный способ задания последовательности позволяет вычислять члены последовательности, через предыдущие её члены. Используя данный способ, мы как бы всегда возвращаемся назад, вычисляя предыдущие члены.

Конфликт интересов

Автор статьи заявляет, что у неё нет конфликта интересов по материалам данной статьи с третьими лицами на момент подачи статьи в редакцию журнала, и ей ничего не известно о возможных конфликтах интересов в настоящем со стороны третьих лиц.

Список литературы

1. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. Москва: Вильямс, 2017. 960 с.
2. Блинков А. Д. Последовательности. Москва: МНЦМО, 2018. 160 с.
3. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. Москва: Наука, 1984. 142 с.
4. Гисин В. Б. Лекции по дискретной математике. Часть 2. Москва: МНЦМО, 2002. 137 с.
5. Григорьев Ю. Д. Последовательности типа Фибоначчи. Теория и прикладные аспекты. Учебное пособие. Санкт-Петербург.: Лань, 2017. 516 с.
6. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. Москва: Наука, 1983. 49 с.
7. Матыцина Т. Н. Дискретная математика. Решение рекуррентных соотношений. Практикум. Кострома, 2010. 35 с.
8. Садовничая И. В., Фоменко Т. Н., Хорошилова Е. В., Ильин В. А. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: учеб. пособие для СПО. Москва.: Юрайт, 2020. 109 с.
9. Сухотин А. М. Высшая математика. Альтернативная методология преподавания. Учебное пособие для прикладного бакалавриата. Москва: Юрайт, 2016. 223 с.
10. Шахмейстер А. Х. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии. Санкт-Петербург: Виктория Плюс, 2014. 296 с

Recurrent sequences and Fibonacci numbers

Zorina I. S.

Khakass State University named after N.F. Katanov, 655017, Russia, Abakan, Lenin st., 90

One of the basic concepts of mathematics is the concept of a sequence of elements of a given set A. A sequence can be considered to be given on A if a law is specified according to which an element un of a set is mapped to each natural number. Sequences are found in various sections of mathematics, with their help many properties of the objects under study are described.
One of the most difficult and interesting problems of number theory is the study of a sequence of prime numbers, the behavior of this sequence with increasing numbers of its members.
There are various ways to specify sequences: using the formula of the common member of the sequence, by specifying the relationship between the members of the sequence (the recurrent method), by enumerating the members of the sequence, using the generating function and other methods. The Fibonacci sequence is one of those that are set only in a recurrent way.

Keywords: recurrent sequences, Fibonacci numbers, number theory